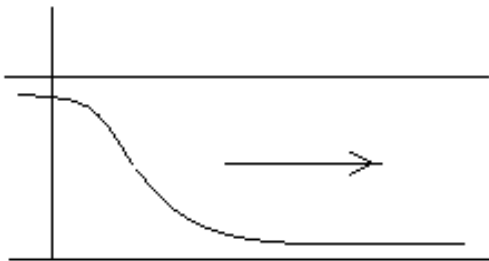
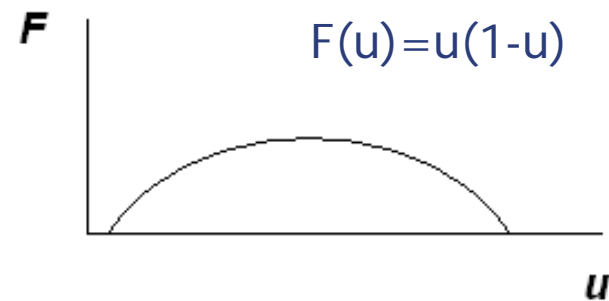




## Lecture 2: Reaction-diffusion waves

# Fisher – KPP equation (1937)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u)$$



Existence for all speeds  $>$  or  $=$   
minimal velocity

Global convergence to waves

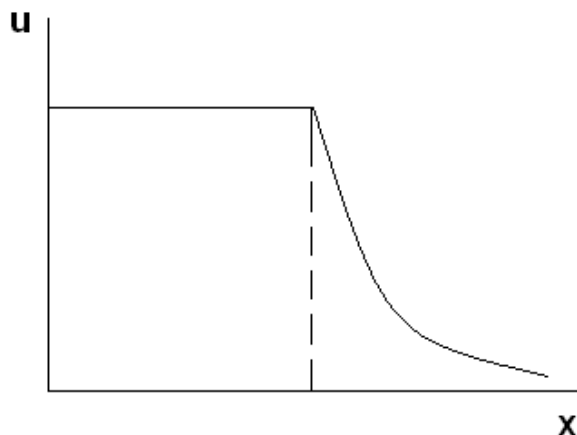
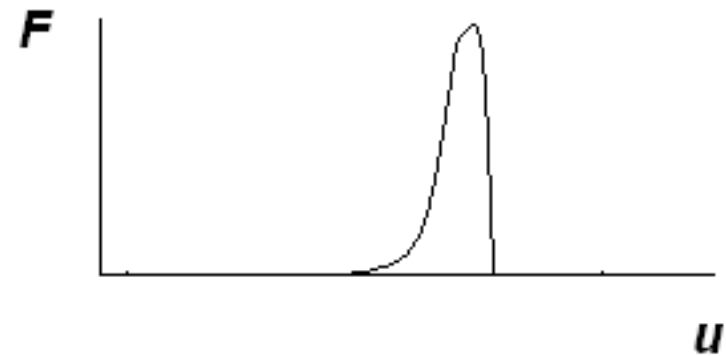
$$u(x,t) = w(x-ct)$$

$$w'' + c w' + F(w) = 0$$

# Zeldovich – Frank-Kamenetskii (1938)

$$F(u) = \exp(Zu) (1-u)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u)$$



Infinitely narrow reaction zone method:  
speed of combustion waves and later  
stability

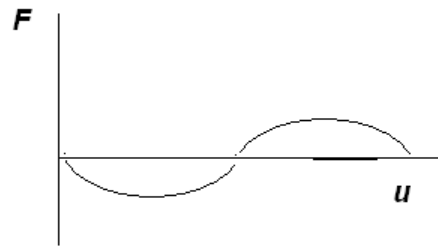
# Mathematical analysis: scalar equation (1950s – 1980s)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u)$$

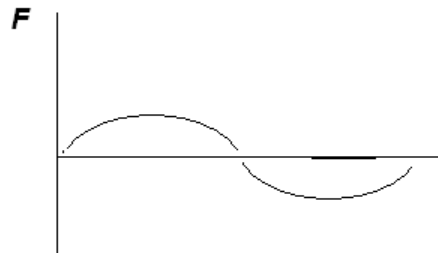
Kanel, Fife-McLeod, Hadeler-Rothe, Uchiyama,...



Monostable: existence for  $c \geq c_0$ , convergence, minimal wave speed



Bistable: existence, uniqueness, convergence, wave speed



Unstable: non-existence

General  $F(u)$ : systems of waves



# Wave existence: scalar equation



## 4 Existence d'ondes progressives

### 4.1 Definitions

On considère l'équation de réaction-diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad (4.1)$$

où  $F(u)$  est une fonction suffisamment régulière,  $F(0) = F(1) = 0$ . L'onde progressive est une solution de cette équation telle que

$$u(x, t) = w(x - ct)$$


où  $c$  est une constante, la vitesse d'onde. La fonction  $w(x)$  satisfait l'équation

$$w'' + cw' + F(u) = 0. \quad (4.2)$$

On cherche des solutions avec des limites données à l'infini :

$$w(+\infty) = 0, \quad w(-\infty) = 1. \quad (4.3)$$

Remarquons que la constante  $c$  n'est pas donnée. Elle doit être déterminée pour qu'il existe une solution du problème (4.2), (4.3).





**Classification des non linéarités.** Les valeurs  $u = 0$  et  $u = 1$  sont des points stationnaires de l'équation

$$\frac{du}{dt} = F(u). \quad (4.4)$$

Si la solution de cette équation avec la condition initiale  $u(0) = u_0$  converge vers  $u = 0$  quelque soit  $u_0$  suffisamment petit, alors on dit que le point stationnaire  $u = 0$  est *stable*. Si dans n'importe quel voisinage de  $u = 0$  il existe  $u_0$  tel que la solution de l'équation (4.4) ne converge pas vers ce point stationnaire, alors il est *non stable*. Il est facile à vérifier que  $u = 0$  est stable si  $F'(0) < 0$  et non stable si  $F'(0) > 0$ . Les mêmes définitions s'appliquent à  $u = 1$ .

Quand on cherche une onde avec les conditions (4.3) à l'infinie, on distingue trois cas : *monostable* - un point est stable par rapport à l'équation (4.4) et l'autre non stable (Figure 6, à gauche) ; *bistable* - les deux points sont stables (Figure 6, à droite) ; *non stable* - les deux points sont non stables. L'existence et les propriétés des ondes dans ces trois cas sont différentes.

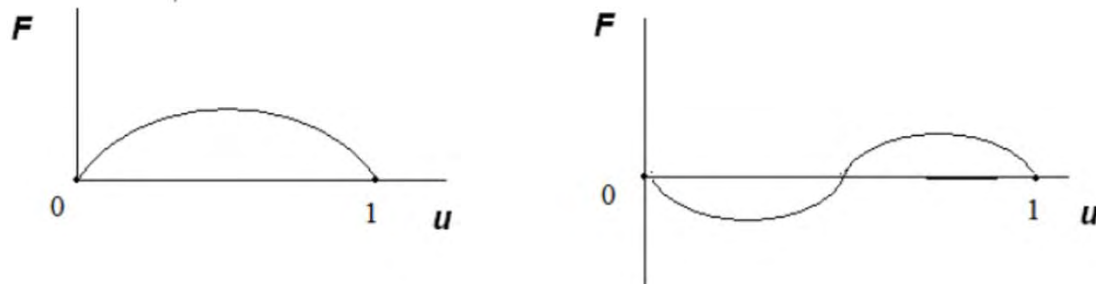


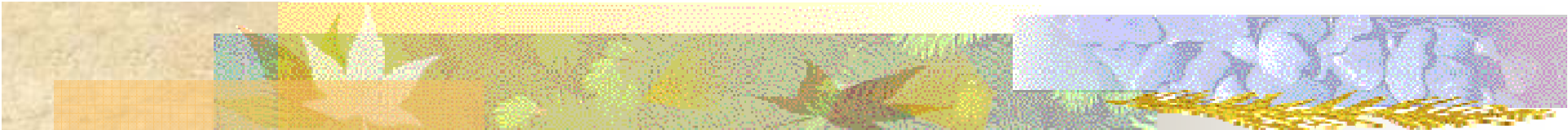
Figure 6: Les exemples de la fonction  $F$  dans le cas monostable (à gauche) et bistable (à droite).



# Existence theorem

Theorem 1. In the monostable case with a positive function  $F(u)$  the waves exist for all values of the speed greater than or equal to the minimal speed.





## 4.2 Le cas monostable

Nous allons étudier le problème (4.2), (4.3) avec la fonction  $F(u)$  telle que


$$F(u) > 0, \quad 0 < u < 1, \quad F'(0) > 0, \quad F'(1) < 0.$$

A la place de l'équation (4.2), on peut considérer le système de deux équations d'ordre 1 :

$$w' = p, \quad p' = -cp - F(w). \quad (4.5)$$

Ce système a deux points stationnaires :  $(0, 0)$  et  $(1, 0)$ . Nous cherchons une solution (ou une trajectoire)  $(w(x), p(x))$  telle que

$$(w(x), p(x)) \rightarrow (1, 0) \text{ quand } x \rightarrow -\infty, \quad (w(x), p(x)) \rightarrow (0, 0) \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

**Etude des points stationnaires.** Nous allons commencer par étudier le type des points stationnaires. Le système (4.4) linéarisé autour du point  $(0, 0)$  s'écrit :

$$w' = p, \quad p' = -cp - F'(0)w$$

ou, autrement,

$$Z' = MZ,$$

où

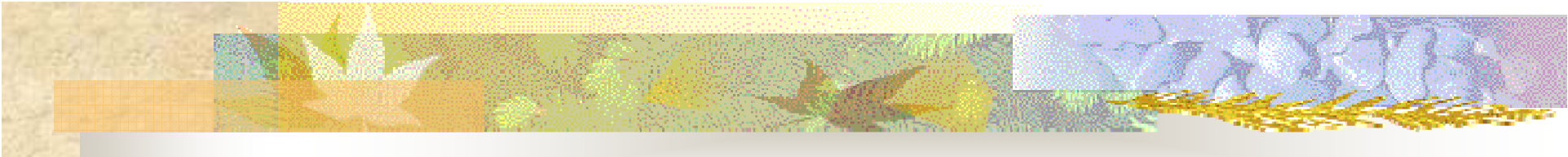
$$Z = \begin{pmatrix} w \\ p \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F'(0) & -c \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice  $M$  sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 + c\lambda + F'(0) = 0.$$



**Exercices.** Valeurs propres des matrices 2x2.


$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - F'(0)} .$$

Comme  $F'(0) > 0$ , alors pour tout  $c$  tel que

$$c \geq 2\sqrt{F'(0)}$$

les deux racines sont négatives. Par conséquent, le point  $(0, 0)$  est un noeud stable.

De façon similaire, on a pour le point  $(1, 0)$  :

$$\lambda^2 + c\lambda + F'(1) = 0.$$

Alors,

$$\lambda_{3,4} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - F'(1)} ,$$

et  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 > 0$ . C'est un point du type selle.



**Exercice.** Les valeurs propres et les types du point stationnaire d'un système 2x2.

**Etude des trajectoires.** Il nous faut démontrer l'existence d'une trajectoire qui sortent du point  $(1, 0)$  et arrive au point  $(0, 0)$ . Les vecteurs propres sont tels qu'il existe une trajectoire sortante de  $(1, 0)$  dans la direction  $w < 1, p < 0$ . Nous allons vérifier que cette trajectoire entre dans  $(0, 0)$ .

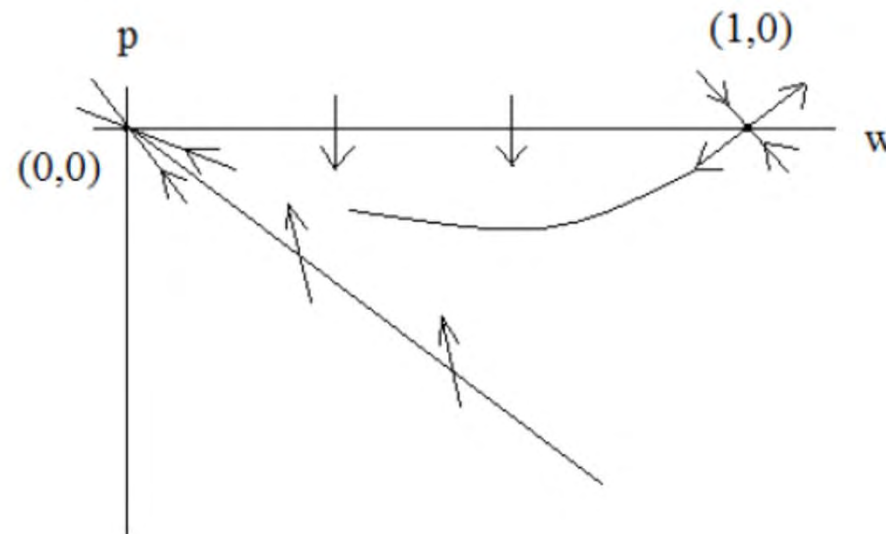


Figure 7: Le cas monostable : l'existence de la trajectoire entre les points stationnaires  $(1, 0)$  et  $(0, 0)$ .

Considérons la ligne droite  $p = -kw$  et déterminons la direction des trajectoires du système (4.5) sur cette ligne. Nous avons :

$$\frac{dp}{dw}\bigg|_{p=-kw} = -c + \frac{F(w)}{kw} \leq -c + \frac{\gamma}{k},$$



$$\frac{dp}{dw}|_{p=-kw} = -c + \frac{F(w)}{kw} \leq -c + \frac{\gamma}{k},$$

où

$$\gamma = \sup_w \frac{F(w)}{w}.$$

Si on a l'inégalité

$$-c + \frac{\gamma}{k} < -k, \quad (4.6)$$

alors

$$\frac{dp}{dw}|_{p=-kw} < -k, \quad 0 < w < 1.$$

Par conséquent, les trajectoires du système (4.5) intersectent la ligne droite  $p = -kw$  dans le sens indiqué sur la Figure 7. Par ailleurs, les trajectoire de ce système intersectent la ligne  $p = 0$  pour  $0 < w < 1$  vers le bas parce que  $w' = 0, p' < 0$ . Alors, la trajectoire sortante de  $(1, 0)$  ne peut pas intersecter ces deux lignes (unicité de solution) et ne peut pas retourner ( $w' < 0$ ). Elle doit donc nécessairement aller vers le point  $(0, 0)$ .

L'existence de la solution recherchée sera démontrée s'il existe une telle valeur de  $k$  que (4.6) est satisfaite. On a une solution de l'inégalité

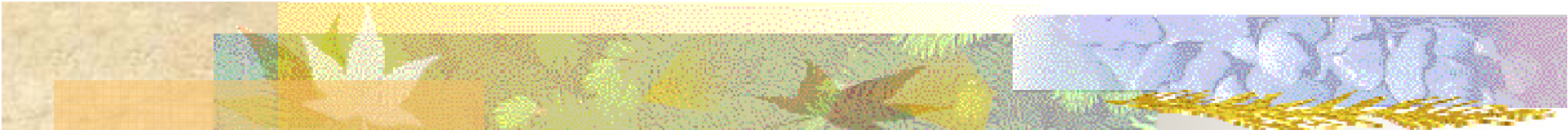
$$k^2 - ck + \gamma < 0$$

si

$$c > 2\sqrt{\gamma}. \quad (4.7)$$

Nous avons donc demontre l'existence de solutions du probleme (4.5) pour  $c > 2\sqrt{\gamma}$ .





**Théorème 3.1.** Il existe une valeur  $c_0 > 0$  telle que quelque soit  $c \geq c_0$  il existe une solution du problème (4.2), (4.3) décroissante par rapport à  $x$ . Pour  $c < c_0$  une telle solution n'existe pas.

**Démonstration.** Nous avons démontré l'existence de telles solutions pour  $c$  suffisamment grand. Supposons maintenant qu'une telle solution existe pour une certaine valeur  $c = c_1$ . Dans ce cas, nous allons vérifier qu'elles existent pour tout  $c \geq c_1$ .

Notons  $p_1(w)$  la fonction correspondant à la trajectoire qui connecte les points  $(1, 0)$  et  $(0, 0)$  pour  $c = 1$ . Étudions la direction des trajectoires du système (4.5) pour  $c = c_2 > c_1$  sur la ligne  $(w, p_1(w))$ . Nous avons

$$\frac{dp}{dw}\bigg|_{p=p_1(w)} = -c_2 - \frac{F(w)}{p_1(w)} < -c_1 - \frac{F(w)}{p_1(w)} = p'_1(w).$$

Cela dit que la direction des trajectoires est telle comme elle est montrée sur la Figure 8. Par conséquent, la trajectoire sortante de  $(1, 0)$  pour  $c = c_2$  reste enfermée entre la trajectoire pour  $c = c_1$  et la ligne  $p = 0$ . Elle doit donc nécessairement aller vers  $(0, 0)$ .

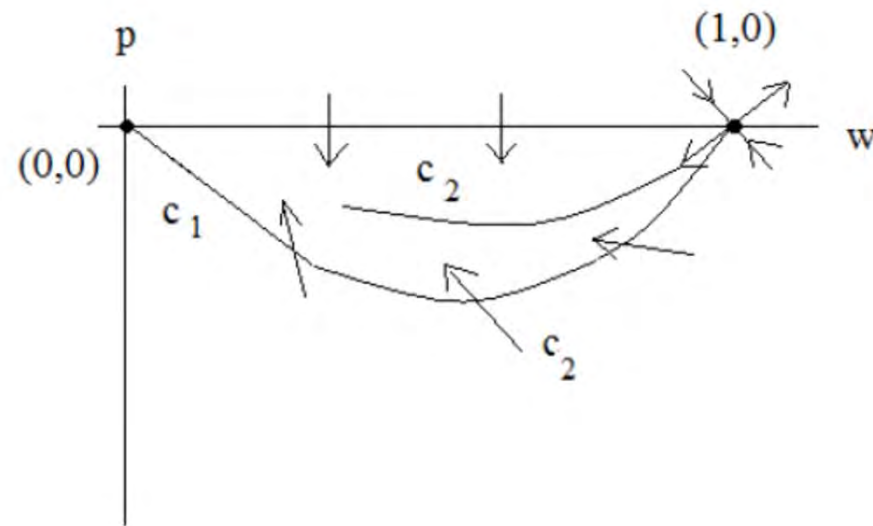


Figure 8: La trajectoire sortante de  $(1, 0)$  pour  $c = c_2$  reste plus haut que la solution pour  $c = c_1$ .

Nous avons donc démontré qu'il existe une valeur  $c_0$  telle que les solutions du problème (4.2), (4.3) existent pour  $c > c_0$ . Il reste à démontrer que la solution existe pour  $c = c_0$  et que  $c > c_0$  (continuité de solution par rapport à paramètre)

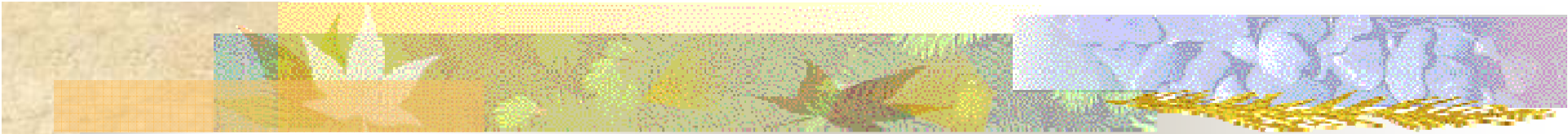
□


$$c < c_0 ?$$


**Exemple.** Si  $F(u) = ku(1 - u)$ , alors  $\gamma = F'(0)$  et  $c_0 = 2\sqrt{F'(0)}$ . On connaît donc la vitesse minimal de l'onde pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku(1 - u).$$

Rappelons que cette équation décrit la propagation d'une population, la croissance de tumeur et d'autres applications. On peut donc déterminer la vitesse de cette propagation. Il y a ici, cependant, une question importante. Nous avons démontré l'existence d'onde pour toutes les vitesses supérieures ou égales à la vitesse minimale  $c_0$ . Quelle est donc la vitesse de propagation qu'on observe dans les applications, est-ce  $c_0$  ou une autre vitesse plus grande ?



### 4.3 Cas bistable

Nous allons étudier le problème (4.2), (4.3) dans le cas bistable où

$$F(w) < 0, \quad 0 < w < w_0, \quad F(w) > 0, \quad w_0 < w < 1, \quad F'(0) < 0, \quad F'(1) < 0. \quad (4.8)$$

**Théorème 3.2.** Si les conditions (4.8) sont satisfaites, alors il existe une et une seule valeur de  $c$  pour laquelle il existe une solution du problème (4.2), (4.3).



# Existence theorem

Theorem 2. In the bistable case (condition on  $F(u)$ ) the wave exists for a unique value of speed.



**Démonstration.** Comme dans le cas monostable, nous allons étudier les trajectoires du système (4.5). Les deux points stationnaires  $(0, 0)$  et  $(1, 0)$  sont des selles. Considérons la trajectoire qui sort de  $(1, 0)$  dans la direction  $p < 0$ . Cette trajectoire dépend de la valeur de  $c$ . Introduisons la fonction  $p = \phi(c)$  ou  $p$  est une valeur dans laquelle cette trajectoire intersecte la ligne droite  $w = w_0$ . On peut vérifier que  $\phi(c)$  est une fonction croissante.

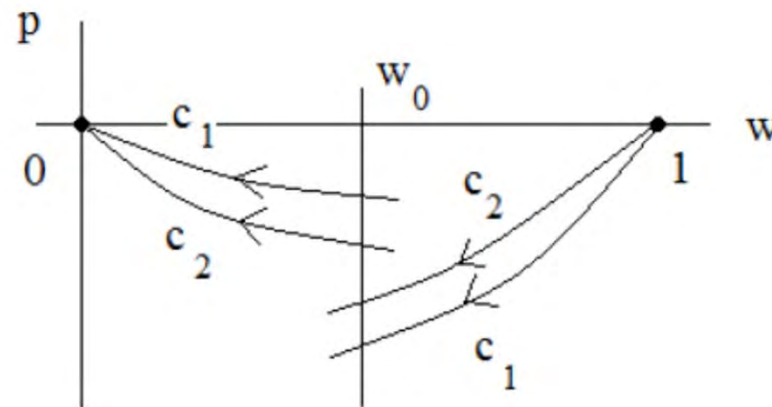


Figure 9: Démonstration de l'existence de solution dans le cas bistable. Ici,  $c_2 > c_1$ .

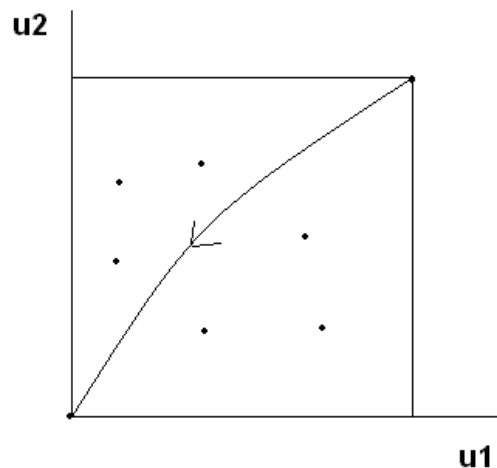
On considère ensuite une trajectoire entrant à  $(0, 0)$  du demi-plan  $p < 0$  (il y en a une seule). Notons  $\psi(c)$  la fonction qui montre l'intersection de cette trajectoire avec la ligne  $w = w_0$ . Cette fonction est décroissante.

L'équation  $\phi(c) = \psi(c)$  donne la trajectoire qui sort de  $(1, 0)$  et arrive vers  $(0, 0)$ . Il existe au plus une seule solution de cette équation.

# Reaction-diffusion systems: monotone systems

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j} \geq 0, \quad i \neq j$$



Bistable: existence, uniqueness, convergence to waves, minimax representation of the speed

Monostable: existence for  $c \geq c_0$ , stability, minimax representation of the minimal wave speed

Unstable: non-existence



# Examples and applications

# Cellular flames

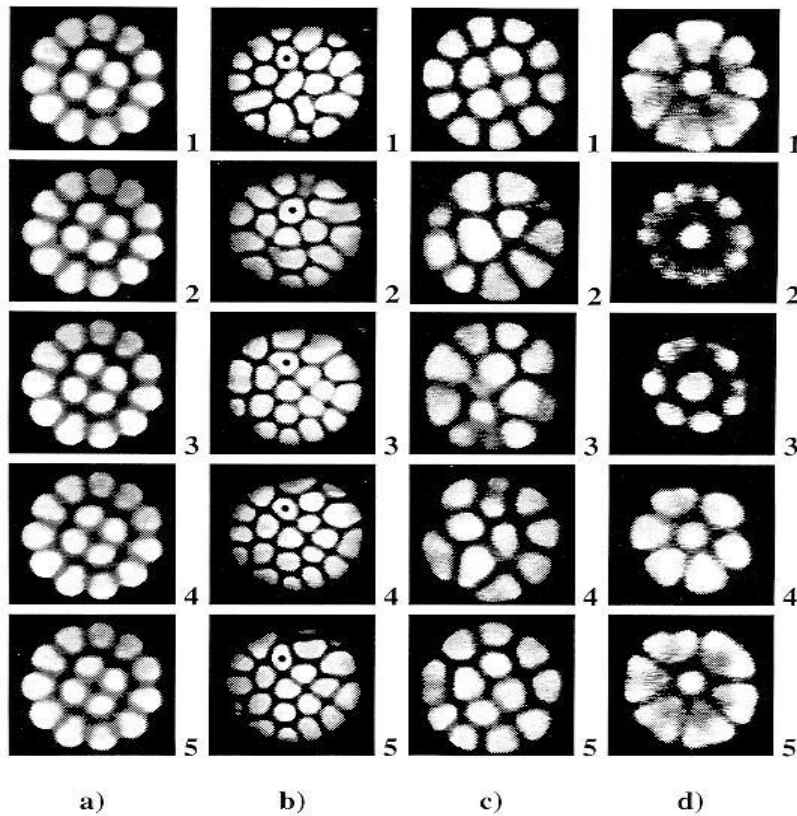


Figure 1. Representative examples of chaotic states of cellular flames: a) an ordered state, b) a disordered state, c) an intermittently ordered state, and d) pulsating-cellular state.



Bifurcation analysis:

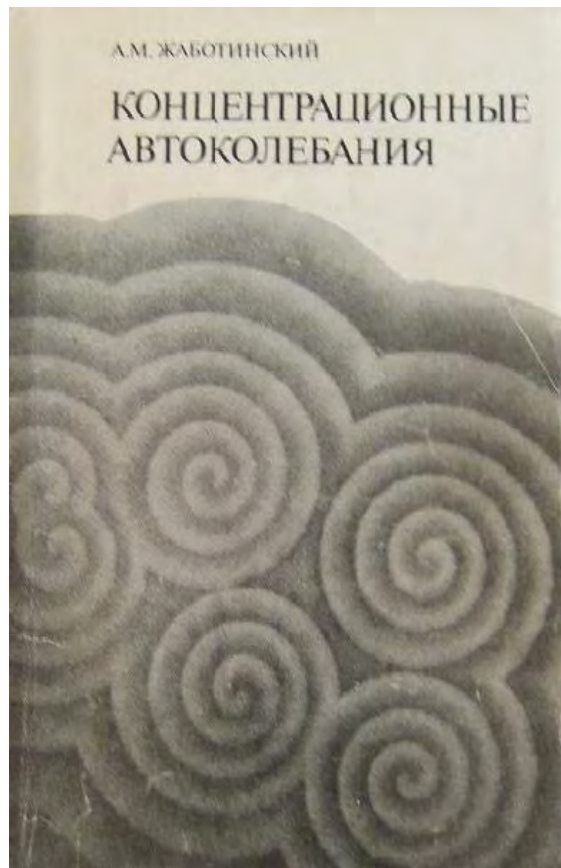
Sivashinsky,  
Matkowsky, ...

M. Gorman, et al.





# Other examples of reaction-diffusion waves: excitable medium



A. Zhabotinskii.  
Concentrational auto-  
oscillations. 1974.

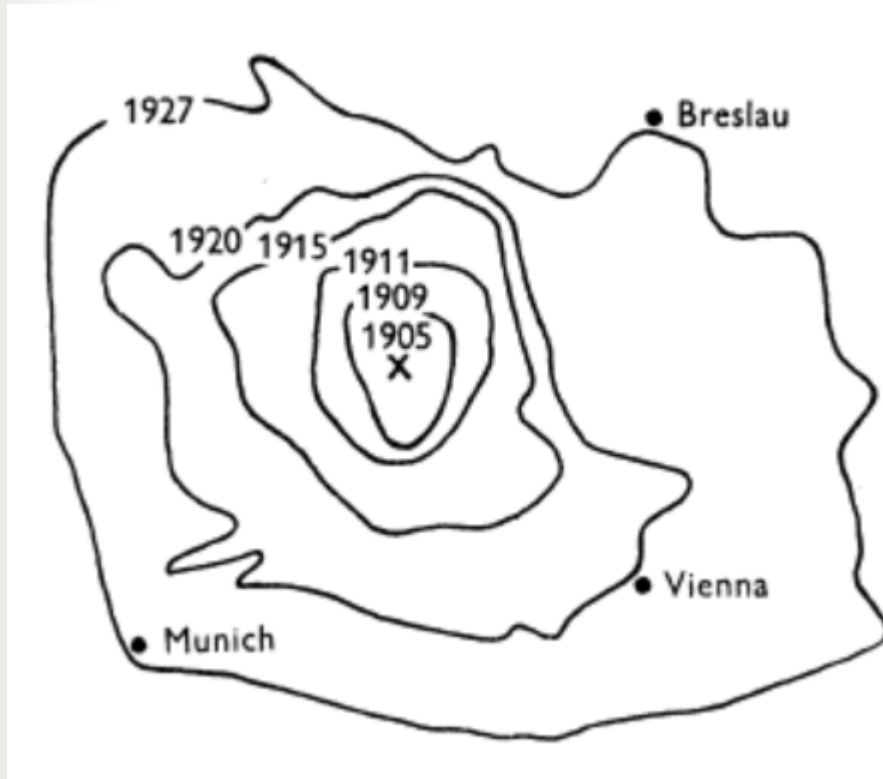




# Population dynamics

- Propagation of dominant gene
- Competition of species
- Prey-predator
- Theory of speciation

# Ecological invasions



Model: KPP



Skellam, 1951

# Population dynamics



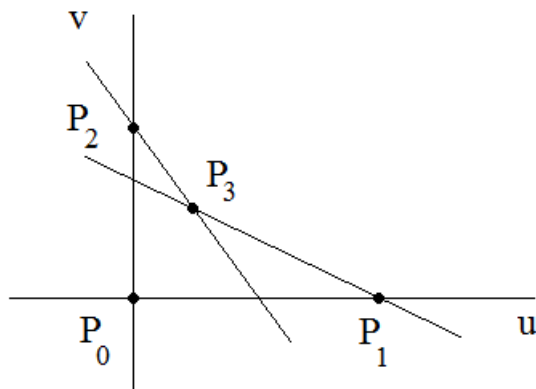
## Single species

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u)$$

$F(u)=u(1-u)$  – asexual reproduction

$F(u)=u^2(1-u)-bu$  – sexual reproduction

## Competition of species



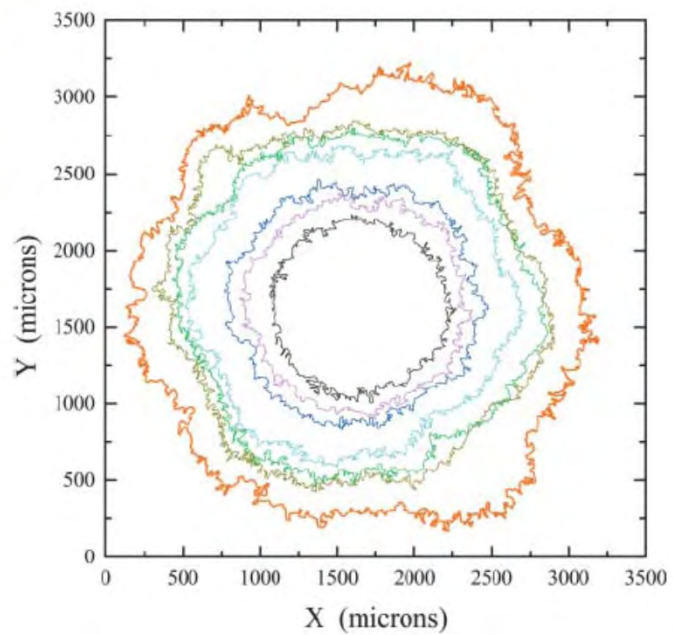
$$\frac{du}{dt} = k_1 u(1 - au - bv),$$

$$\frac{dv}{dt} = k_2 v(1 - cu - dv)$$

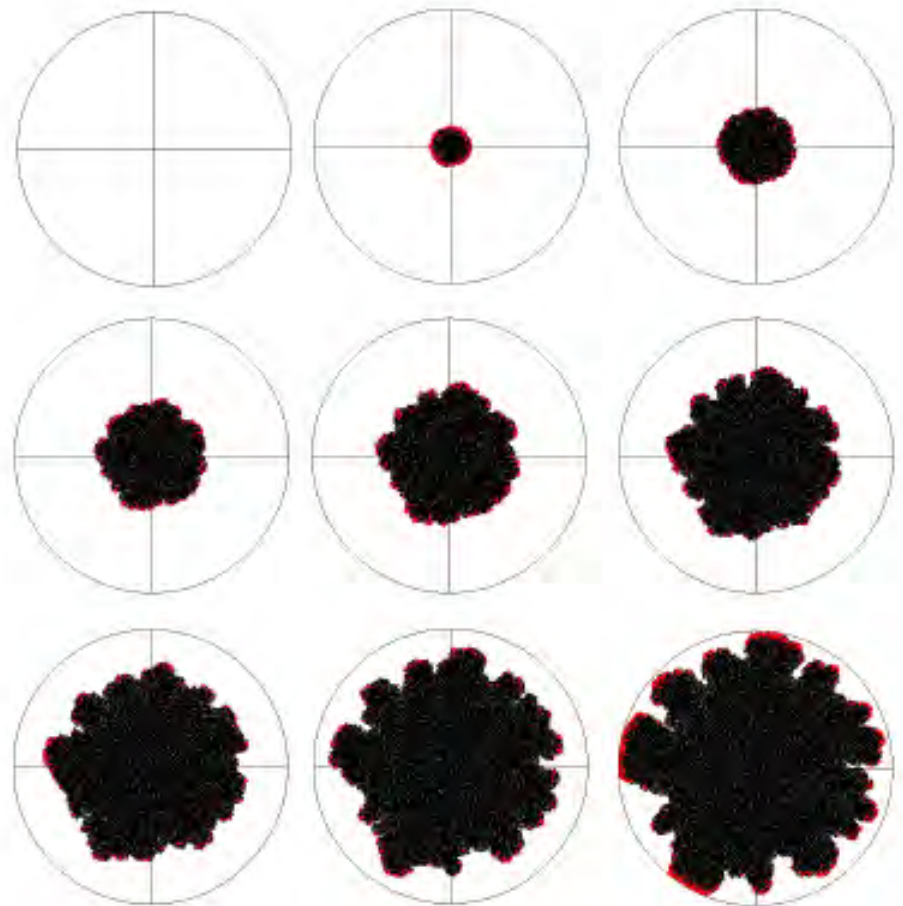
$$P_0 = (0, 0), P_1 = (0, 1/d), P_2 = (1/a, 0)$$

$$P_3 = (u_0, v_0) \quad au + bv = 1, \quad cu + dv = 1$$

# Bio-medical applications: tumor growth

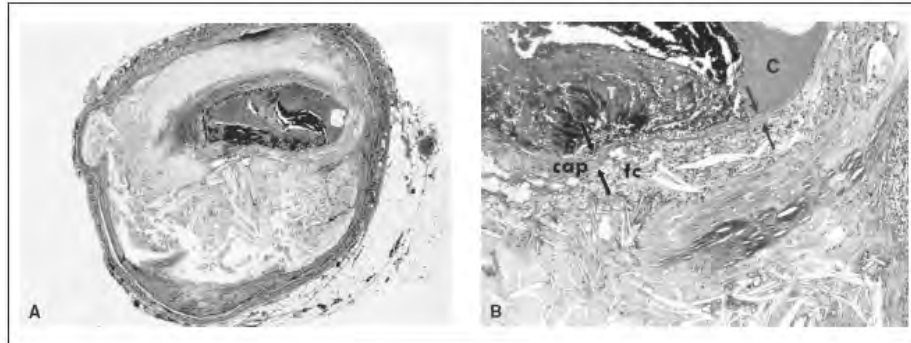


$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(1-u)$$

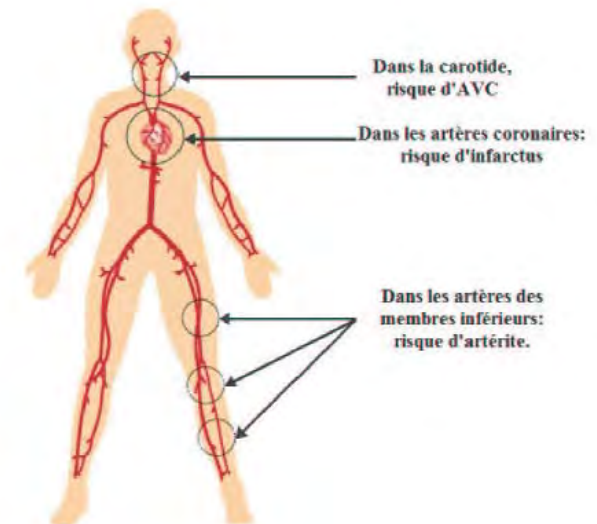
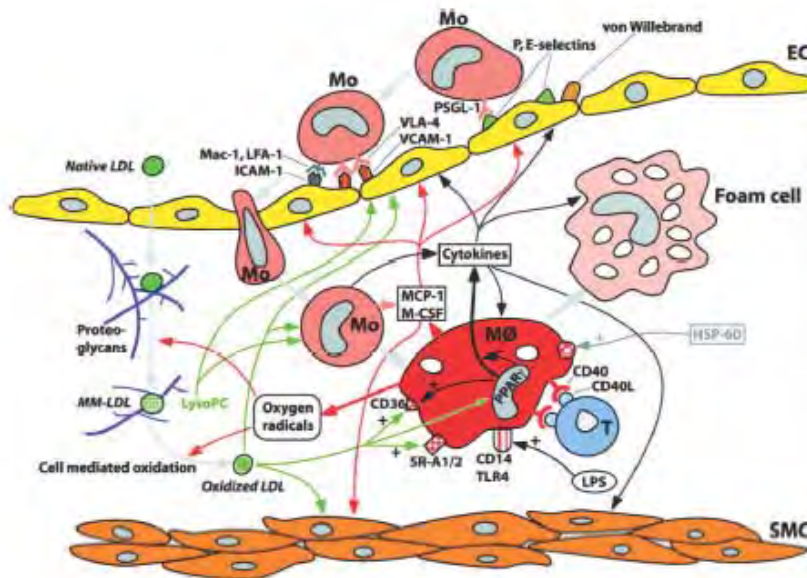
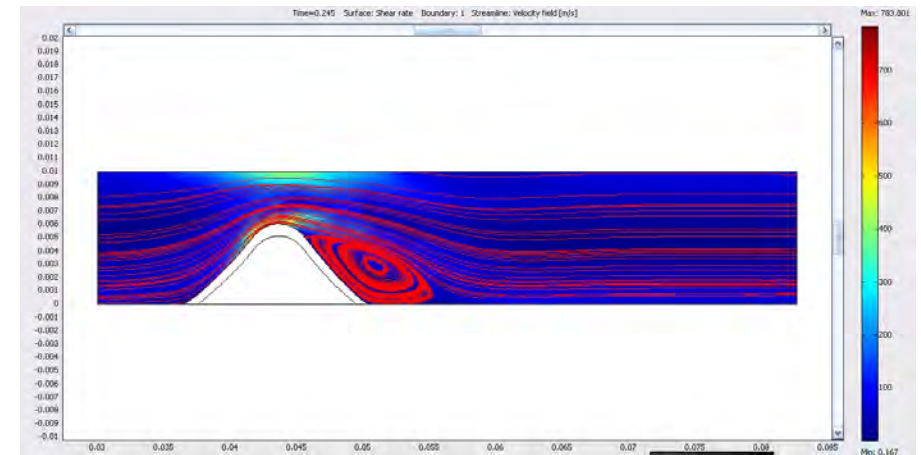




# Atherosclerosis



**Figure 1:** Plaque disruption and thrombosis. **A.** A stenotic coronary plaque containing a huge atheromatous core that is separated from the vascular lumen by a very thin cap of fibrous tissue, ie, a "vulnerable plaque". The fibrous cap is disrupted with superimposed non-occlusive luminal thrombosis. **B.** Higher magnification of the plaque-thrombus interface. The fibrous cap is very thin (between arrows) and heavily infiltrated by foam cells (fc), probably of macrophage origin. **C:** contrast medium injected post mortem; T: thrombus

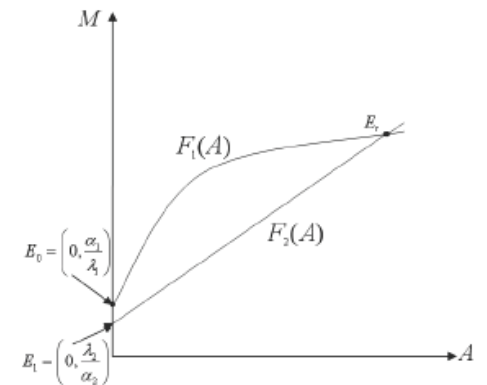






$$f_1(A) = \frac{\alpha_1 + \beta_1 A}{1 + A/\tau_1} \quad f_2(A) = \frac{\alpha_2 A}{1 + A/\tau_2}$$

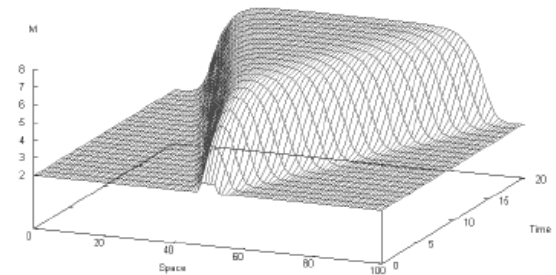
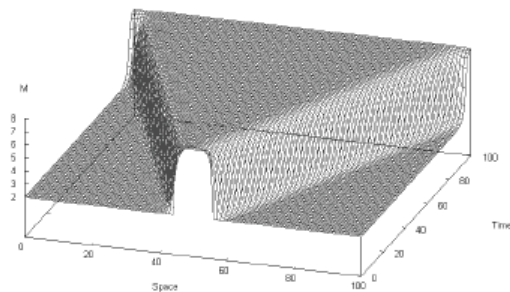
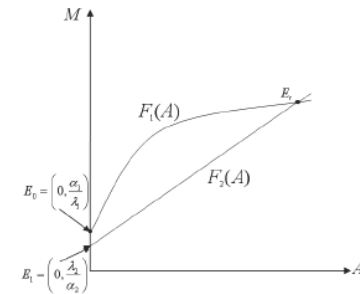
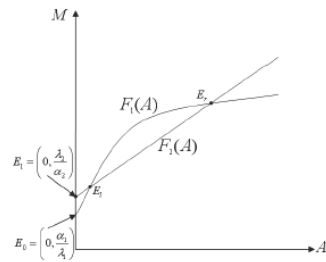
### Cholesterol level:



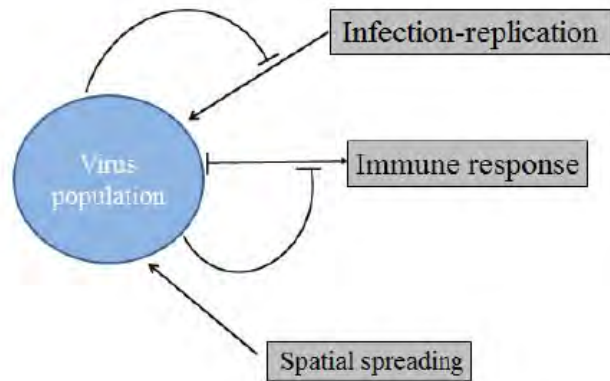
# high

# Reaction-diffusion system

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + f_1(A) - \lambda_1 M \\ \frac{\partial A}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + f_2(A)M - \lambda_2 A \end{cases}$$



# A model of immune response: Delay RD equation

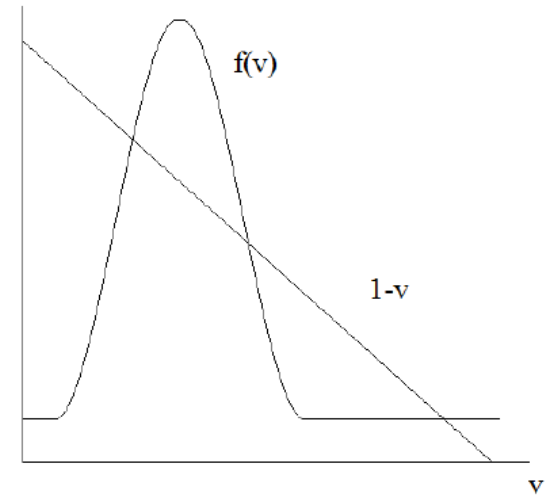


Immune response:

Time delay

Growth for small load

Decay for large load



Local virus concentration in the tissue (lymph node, spleen)

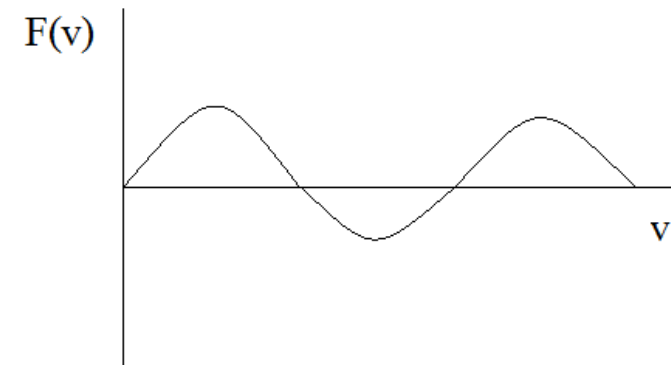
$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + kv(1-v) - f(v_\tau)v.$$

$$v = v(x, t), v_\tau = v(x, t - \tau)$$

# Virus spread without time delay

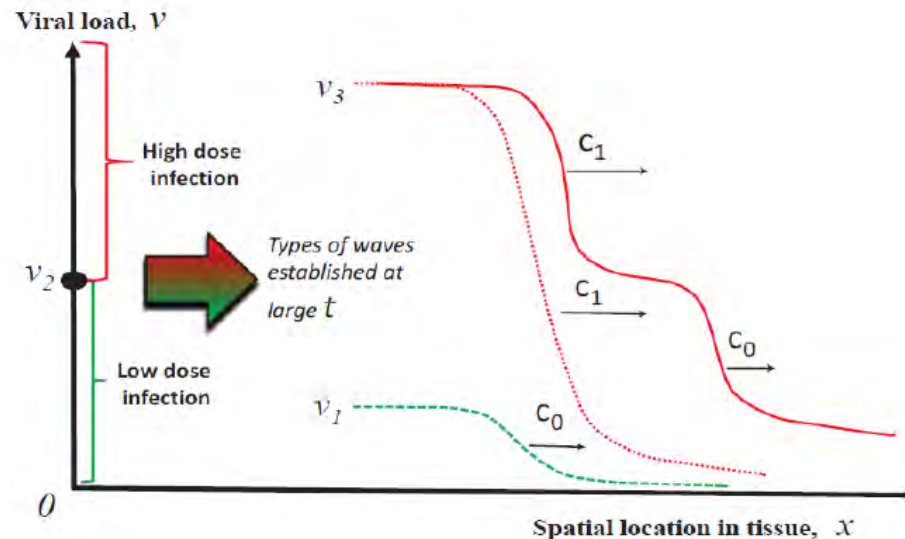
$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + kv(1-v) - f(v)v.$$

$$F(v) = v(1-v-f(v)).$$



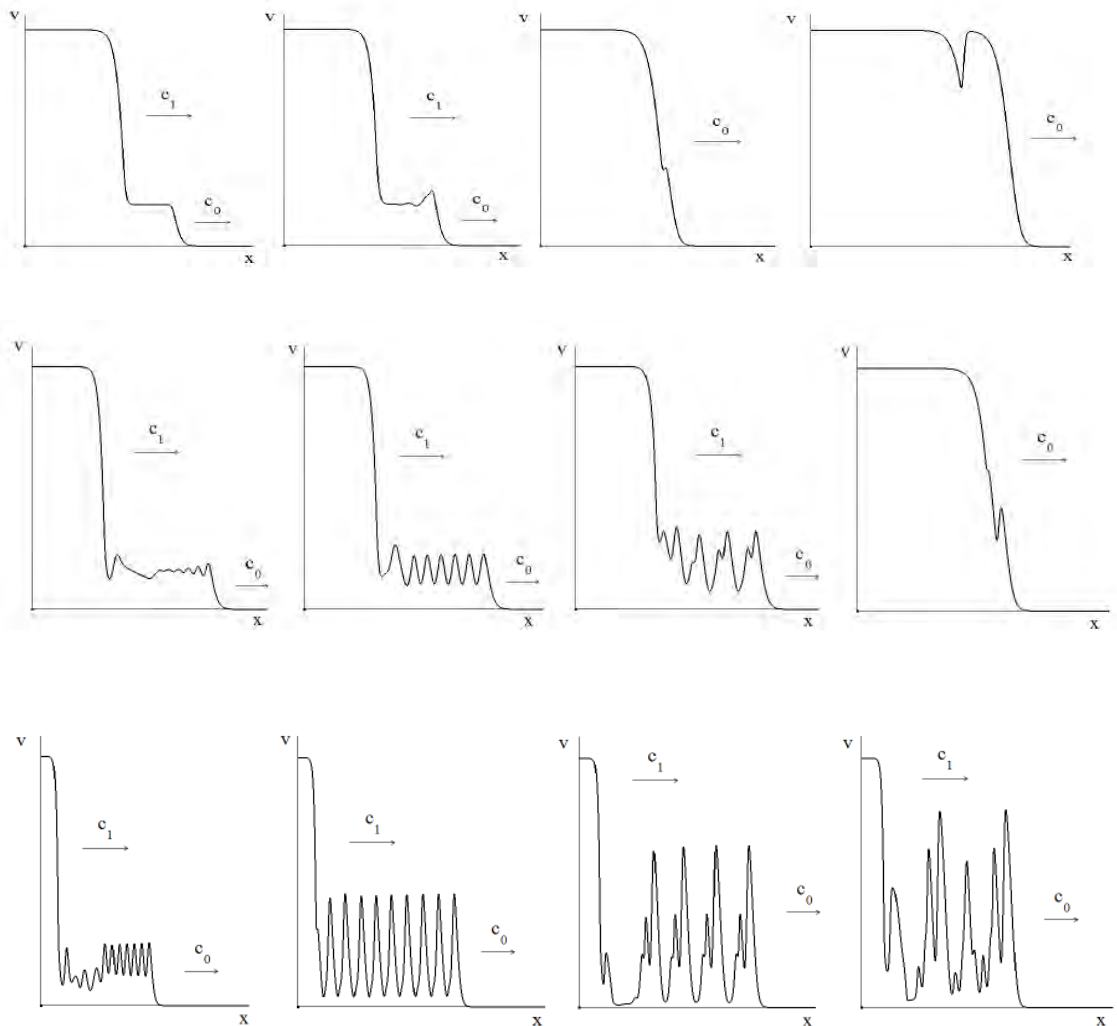
Three regimes  
of infection  
spreading:

Low dose  
High dose  
Low-High dose





# Complete problem (num simulations)



$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + kv(1-v) - f(v_\tau)v$$

