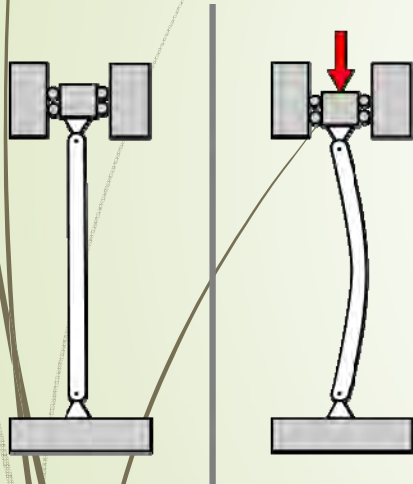
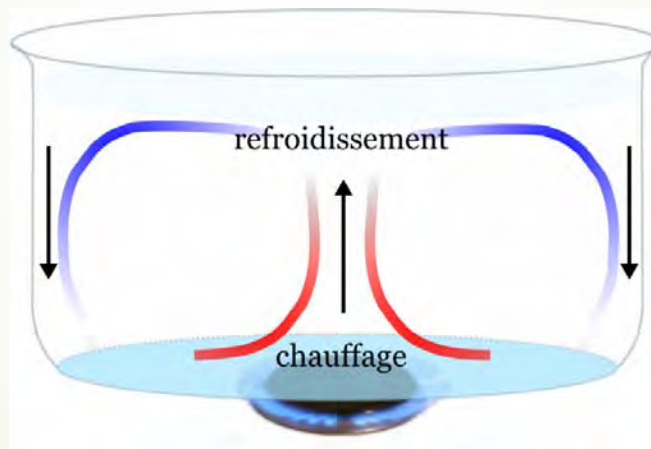


Reaction-diffusion equations: Stability and instability of solutions



Barre elastique



Convection



Peau des animaux



5.2 Stabilité des solutions stationnaires

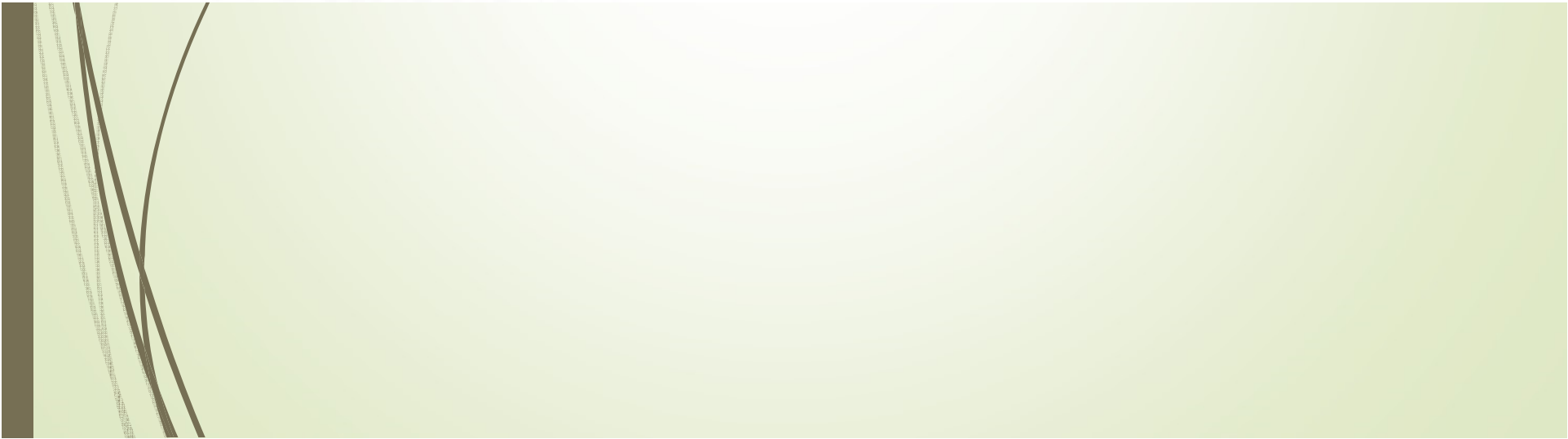
Equations différentielles ordinaires. Une équation scalaire :

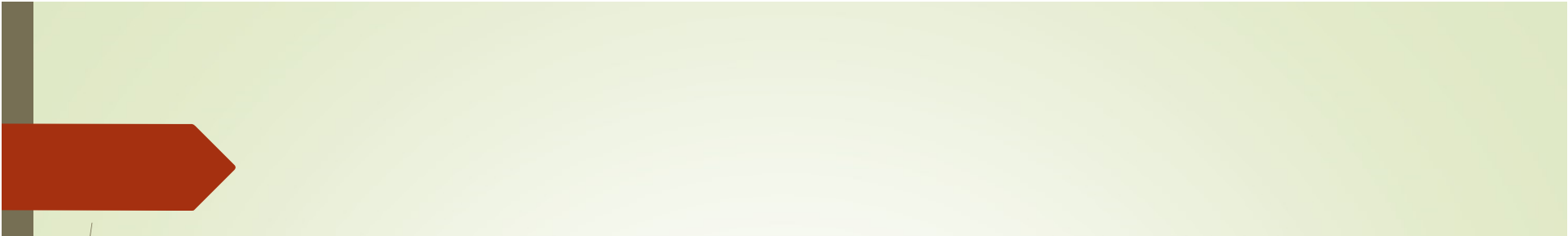
$$\frac{du}{dt} = F(u), \quad u(0) = u_0,$$

$F(0) = 0$, $u = 0$ est un point stationnaire,

$F'(0) < 0$ - stabilité : $u(t) \rightarrow 0$,

$F'(0) > 0$ - instabilité : $u(t) \not\rightarrow 0$.





Système linéaire de deux équations :

$$\frac{du_1}{dt} = au_1 + bu_2,$$

$$\frac{du_2}{dt} = cu_1 + du_2,$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\frac{dU}{dt} = MU.$$

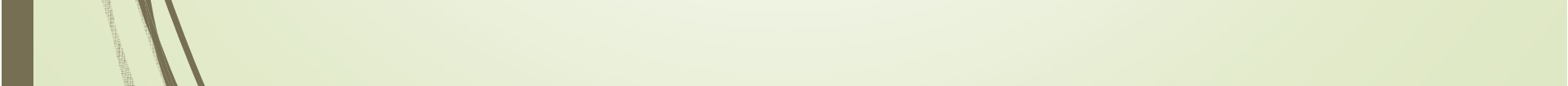
Cherchons la solution de cette équation dans la forme


$$U(t) = p_1 e^{\lambda_1 t} + p_2 e^{\lambda_2 t},$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice M , p_1 et p_2 les vecteurs propres.

Si $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i=1,2$, alors $(0,0)$ est stable : $U(t) \rightarrow (0,0)$ quelque soit $U(0)$.

Si $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ ou $\lambda_1 > 0$, alors $(0,0)$ est instable : $U(t) \not\rightarrow (0,0)$ pour certaines conditions initiales $U(0)$.



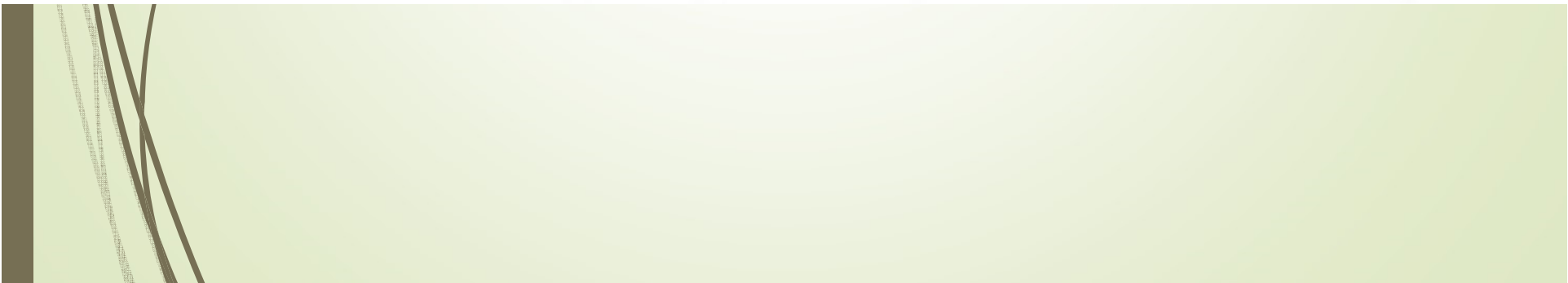


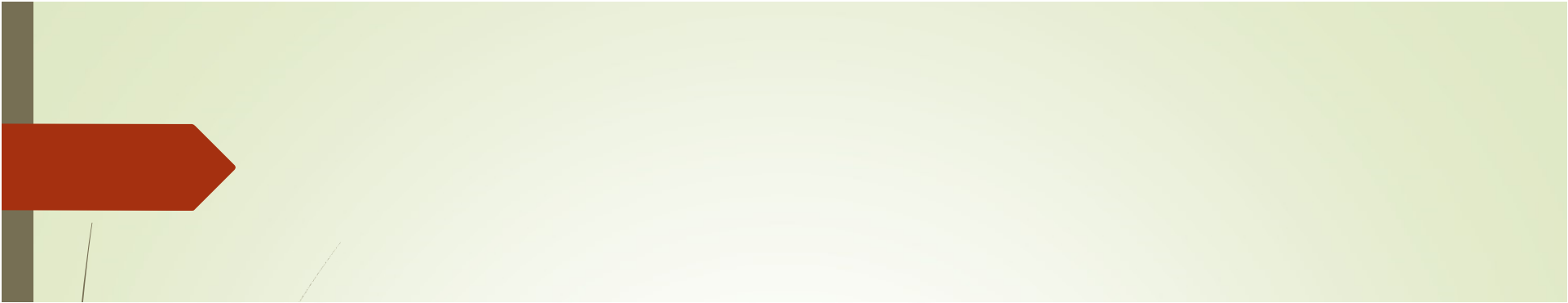
Definition de stabilité pour une équation de réaction-diffusion. On considère un problème de réaction-diffusion non stationnaire (problème parabolique) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(u, x), \quad (5.7)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.8)$$

(La condition limite peut être différente.) Soit $u_0(x)$ une solution stationnaire, c'est-à-dire une solution de (5.7), (5.8) qui ne dépend pas du temps. Elle satisfait le problème de réaction-diffusion elliptique :

$$\Delta u + F(u, x) = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.9)$$




Soit $\epsilon(x)$ une fonction qui satisfait les conditions limites et

$$\sup_{x \in \Omega} |\epsilon(x)| \leq \epsilon_0 \quad (5.10)$$

pour un $\epsilon_0 > 0$.

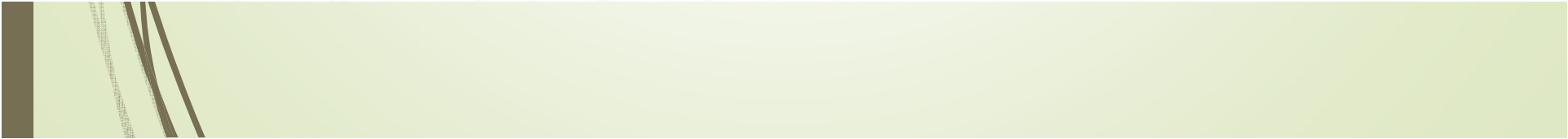
On dit que la solution stationnaire $u_0(x)$ est *asymptotiquement stable par rapport aux petites perturbations* s'il existe un ϵ_0 telle que quelque soit la fonction $\epsilon(x)$ qui satisfait (5.10), la solution du problème (5.7), (5.8) avec la condition initiale

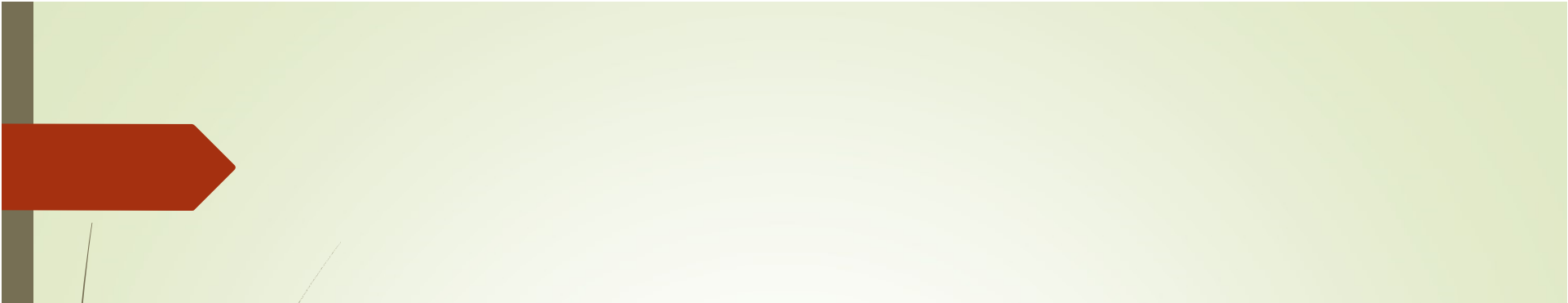
$$u(x, 0) = u_0(x) + \epsilon(x)$$

converge vers cette solution stationnaire, c'est-à-dire

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x, t) - u_0(x)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (5.11)$$

La solution stationnaire $u_0(x)$ est *globalement asymptotiquement stable* si la convergence (5.11) a lieu quelque soit la condition initiale $u(x, 0)$.





Opérateur linéarisé. Soit $A(u)$ un opérateur elliptique non linéaire :

$$A(u) = \Delta u + F(x, u).$$

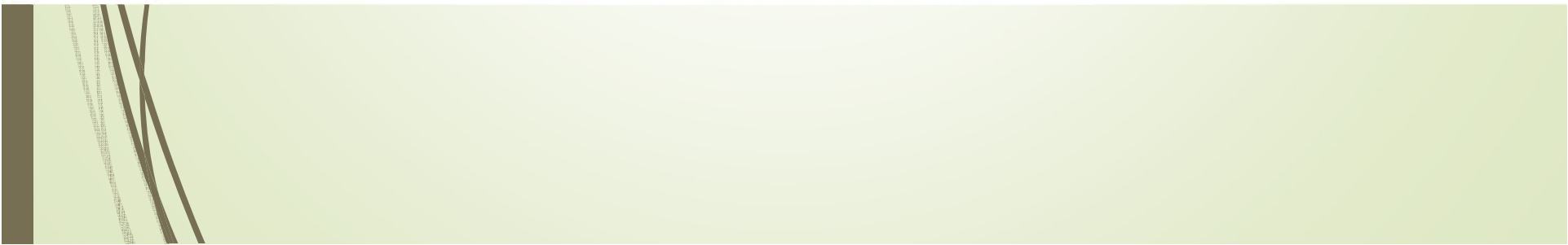
L'opérateur linéarisé autour d'une fonction u_0 est, par définition :


$$A'(u_0)v = \frac{d}{d\tau} A(u_0 + \tau v)|_{\tau=0} \equiv \Delta v + F'_u(u_0, x)v.$$

On a

$$A(u_0 + v) = A'(u_0)v + o(\|v\|). \quad < \text{eps}(v) \|v\| \text{ pour tout } v$$

Exemple. Soit $f(x)$ fonction d'une variable $x \in \mathbb{R}$, $f(x_0) = 0$. Si $f'(x)$ est dérivable, alors

$$f(x_0 + y) = f'(x_0)y + o(|y|).$$




Théorème 4.3. (Stabilité de solutions.) Si toutes les valeurs propres de l'opérateur $A'(u_0)$ linéarisé autour d'une solution stationnaire u_0 sont dans le demi-plan gauche, alors cette solution est asymptotiquement stable par rapport aux petites perturbations.

Démonstration. Notons $u^\pm(x, t)$ les solutions du problème (5.7), (5.8) avec les conditions initiales $u(x, 0) = u_\pm(x)$. Alors, la fonction $u^-(x, t)$ est croissante par rapport à t pour chaque $x \in \Omega$, la fonction $u^+(x, t)$ est décroissante. Elles convergent vers la solution stationnaire $u_0(x)$ parce qu'il n'y pas d'autres solutions stationnaires dans un petit voisinage de $u_0(x)$ (Lemme 4.1).

Il reste de remarquer que pour toute condition initiale $u(x, 0)$ telle que

$$u_-(x) \leq u(x, 0) \leq u_+(x), \quad x \in \Omega,$$

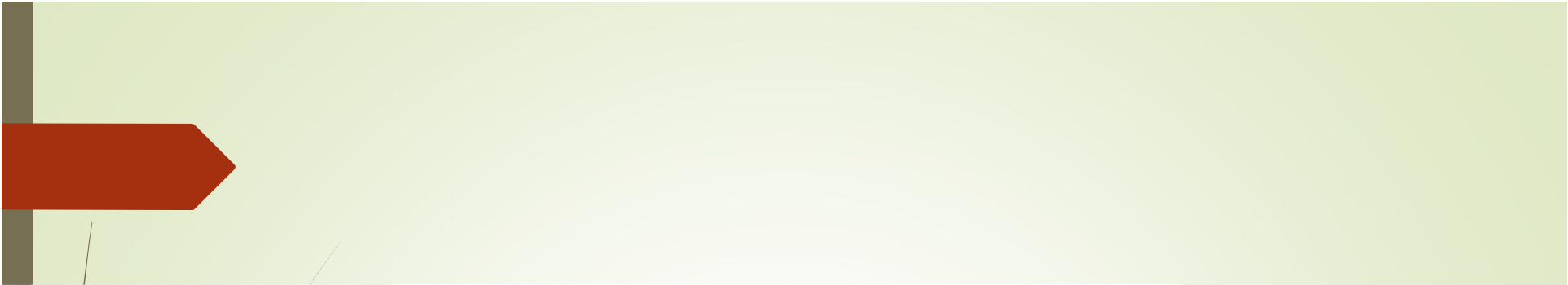
la solution $u(x, t)$ satisfait

$$u^-(x, t) \leq u(x, t) \leq u^+(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

(Lemme 4.2). Par conséquent, $u(x, t)$ converge vers $u_0(x)$.

□





Lemme 4.2. (Comparaison de solutions.) Soit $u_i(x, t)$ la solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(u, x), \quad (5.13)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.14)$$

avec la condition initiale $u_i(x, 0) = u_i^0(x)$, $i = 1, 2$. Si

$$u_1^0(x) \geq u_2^0(x), \quad x \in \Omega,$$

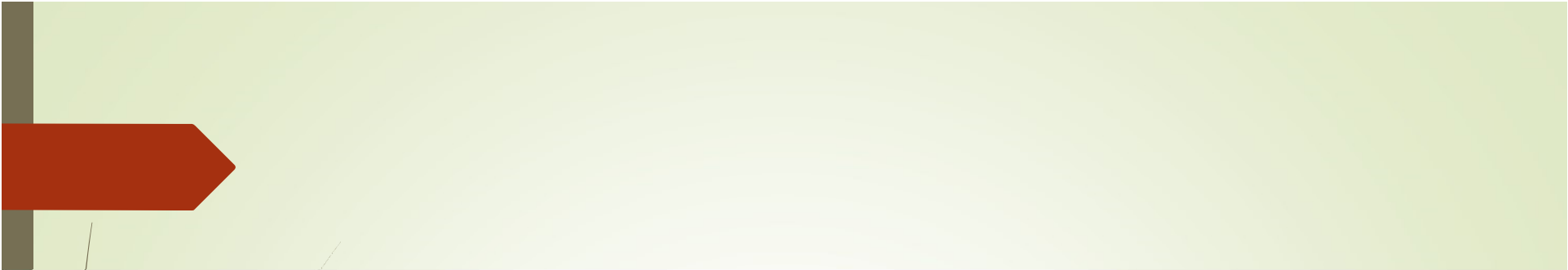
alors

$$u_1(x, t) \geq u_2(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que la différence $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ satisfait les conditions du théorème de positivité de solutions.

□





Théorème 4.4. (Instabilité de solutions.) S'il existe une valeur propre de l'opérateur $A'(u_0)$ linéarisé autour d'une solution stationnaire u_0 dans le demi-plan droite, alors cette solution est instable par rapport aux petites perturbations.

Démonstration. S'il existe des valeurs propres de l'opérateur $A'(u_0)$ dans le demi-plan droite, alors la valeur propre principale λ_0 est positive. Soit $v_0(x)$ la fonction propre correspondant.

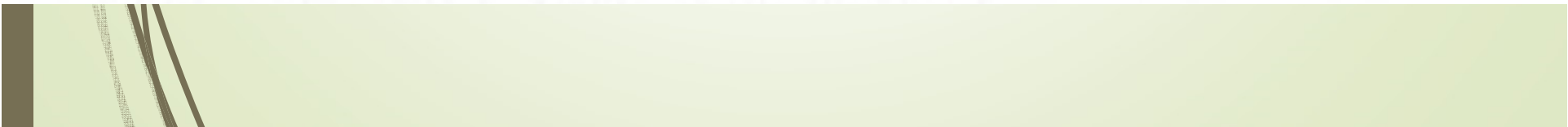
Rappelons qu'elle est positive dans Ω . Pour $\tau > 0$ suffisamment petit, la fonction $u_-(x) = u_0(x) + \tau v_0(x)$ est une sous-solution :

$$A(u_0 + \tau v_0) = \tau A'(u_0)v + o(\tau\|v\|) = \tau\lambda_0 v + o(\tau\|v\|) > 0.$$

Comme $u_-(x) \geq u_0(x)$ et la solution du problème (5.7), (5.8) est croissante, alors elle ne converge pas vers $u_0(x)$.

□


Remarque. La démonstration des Théorèmes 4.3 et 4.4 utilise les sous- et sur-solutions qui existent pour une équation scalaire et pour une classe de systèmes mais pas dans le cas général. Cependant, le résultat sur le lien entre le spectre et la stabilité reste valable.





Some remarks

- Presented method works only for the scalar second order equations but the result is general
- In unbounded domains it is necessary to take into account essential spectrum
- Different types of instability (single eigenvalue, pair of complex conjugate eigenvalues)
- Bifurcations



Exemple 4.5. Considérons le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

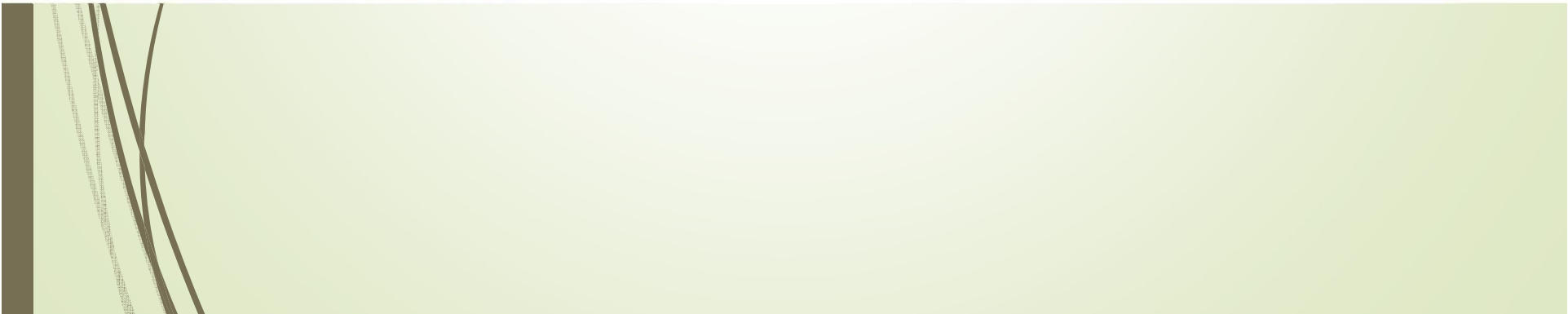
où $F(0) = 0$. La fonction $u_0 = 0$ est une solution stationnaire. L'opérateur linéarisé autour u_0 :

$$A'(u_0)v = v'' + F'(0)v.$$

Le problème de valeurs propres

$$v'' + F'(0)v = \lambda v, \quad v(0) = v(1) = 0$$

a toutes les valeurs propres négatives si $F'(0) < \pi^2$. Dans ce cas, la solution stationnaire est stable.
Si $F'(0) > \pi^2$, elle est instable.



6.3 Structures de Turing

Définition. Considérons un système de réaction-diffusion de deux équations :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, v), \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G(u, v) \quad (6.17)$$

dans un intervalle $0 < x < L$ avec les conditions limites

$$u(0) = u(L) = 0, \quad v(0) = v(L) = 0. \quad (6.18)$$

On suppose que

$$F(0, 0) = G(0, 0) = 0,$$

c'est-à-dire, $u = v = 0$ est une solution stationnaire du problème (6.16)-(6.18).

$$\frac{du}{dt} = F(u, v), \quad (6.19)$$

$$\frac{dv}{dt} = G(u, v). \quad (6.20)$$

Supposons que $u = v = 0$ est une solution stable de ce système, c'est-à-dire, toutes les deux valeurs propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & , & b \\ c & , & d \end{pmatrix},$$

où

$$a = F'_u(0, 0), \quad b = F'_v(0, 0), \quad c = G'_u(0, 0), \quad d = G'_v(0, 0)$$

ont les parties réelles négatives.

Nous allons montrer que la solution $u = v = 0$ étant stable comme solution du système (6.19), (6.20) peut devenir non stable comme solution du problème (6.16)-(6.18). Ce résultat semble contre intuitive parce que la diffusion agit d'habitude dans le sens inverse, pour faire les solutions plus stables. L'instabilité de cette solution mène à l'apparition (bifurcation) d'autres solutions qui dépendent de la variable d'espace. Ce sont des structures de Turing.

Condition d'apparition. Pour étudier la stabilité de la solution $u = v = 0$ comme solution stationnaire du problème (6.16)-(6.18), il faut analyser le problème de valeurs propres :

$$d_1 u'' + au + bv = \lambda u, \quad (6.21)$$

$$d_2 v'' + cu + dv = \lambda v, \quad (6.22)$$

$$u(0) = u(L) = 0, \quad v(0) = v(L) = 0. \quad (6.23)$$

Nous cherchons la solution de ce problème dans la forme

$$u(x) = p \sin(kx), \quad v(x) = q \sin(kx),$$

ou

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

pour satisfaire les conditions limites. En substituant la solution dans les équations, on obtient

$$-d_1 k^2 + ap + bq = \lambda p, \quad (6.24)$$

$$-d_2 k^2 + cp + dq = \lambda q. \quad (6.25)$$

Autrement dit, λ est une valeur propre de la matrice

$$M(k) = \begin{pmatrix} a - d_1 k^2 & b \\ c & d - d_2 k^2 \end{pmatrix},$$

$$M(0) = M.$$

L'hypothèse que $\operatorname{Re} \lambda_i(0) < 0, i = 1, 2$ implique :

$$a + d < 0, \quad ad - bc > 0. \quad (6.26)$$

Ensuite,

$$\det M(k) = ad - bc - (ad_2 + dd_1)k^2 + d_1 d_2 k^4, \quad \operatorname{Tr} M(k) = a + d - (d_1 + d_2)k^2.$$

Si $\det M(k) = 0$, alors une valeur propre de cette matrice est négative et l'autre égale à zéro. Cela donne la condition de bifurcation. Vérifions si cette condition peut être vérifiée étant donné (6.26).

Si $a < 0$ et $d < 0$, alors $\det M(k) > 0$. Nous devons donc supposer qu'une de ces deux constantes est positive mais leur somme reste négative. Soit $a > 0$. Les constantes b, c, d peuvent être choisies de telle façon que (6.26) est satisfait. Pour a, b, c, d, k, d_2 fixés, nous pouvons augmenter d_1 pour que le déterminant de la matrice $M(k)$ devient zéro.

Exemples. 1. Développement d'un embryon. Au debut de développement d'un embryon toutes les cellules sont identiques. Après quelque temps, elles deviennent différentes. Comment cette différenciation se produit ? A. Turing a proposé un mécanisme base sur l'instabilité et l'apparition de structures appelées par la suite les structure de Turing. Son idée utilise le fait que ces structures apparaissent quand le domaine (embryon) est suffisamment grand. Quand il est petit, la solution homogène est stable. Quand le domaine augmente, ce qui correspond à la croissance de l'organisme, la solution homogène n'est plus stable. Certaines substances chimiques (morphogènes) ne sont plus distribuées uniformément et l'expression de gènes dans les cellules change d'une cellule à l'autre. Même si les études biologiques ne confirment pas ce mécanisme, il reste quand même intéressant. Par ailleurs, les structures de Turing sont souvent utilisées pour la modélisation en biologie.

2. Peau des animaux, etc.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \alpha u^2(k - u) - \beta uv + \epsilon, \quad (6.27a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + \gamma u - \delta v. \quad (6.27b)$$

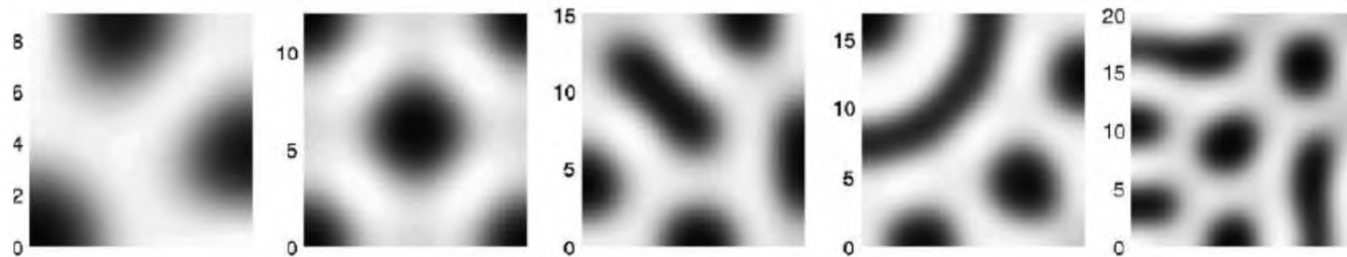


Figure 12: Un exemple de structures de Turing. La composante $u(x, y)$ de solution du système (6.27a), (6.27b) en fonction de la taille du domaine.

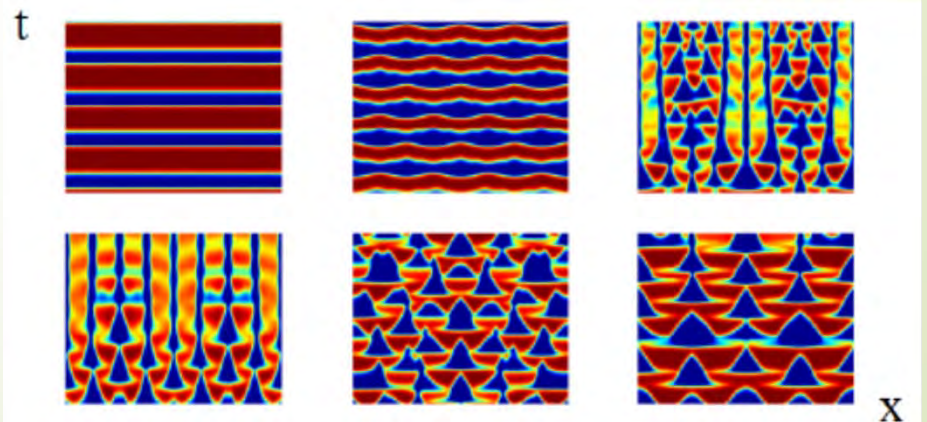
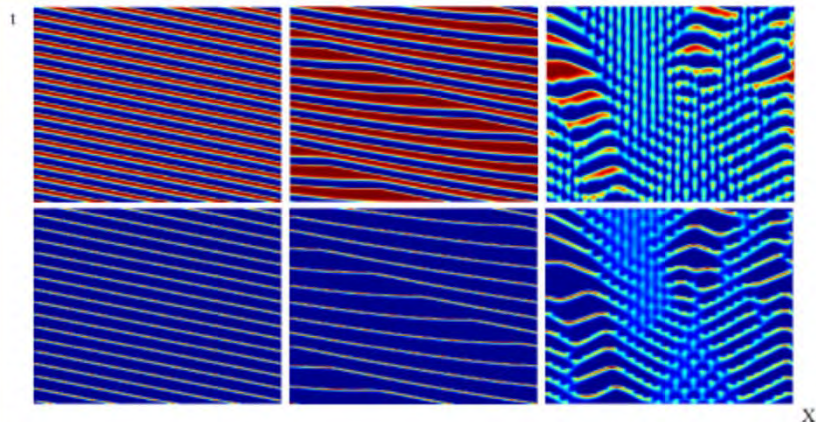
Animal skin




Model: reaction-diffusion systems
(Turing instability)

Prey-predator

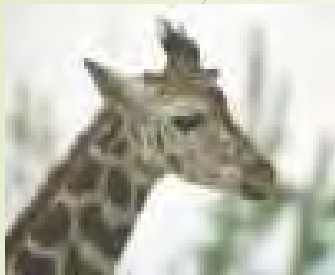
$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= D_N \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + r_0 N \left(1 - \frac{N}{N_0}\right) - \frac{kN}{1 + aN} P, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= D_P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{kN}{1 + aN} P - P - fP^2,\end{aligned}$$





Patterns and waves for nonlocal reaction-diffusion equations with applications in the theory of speciation

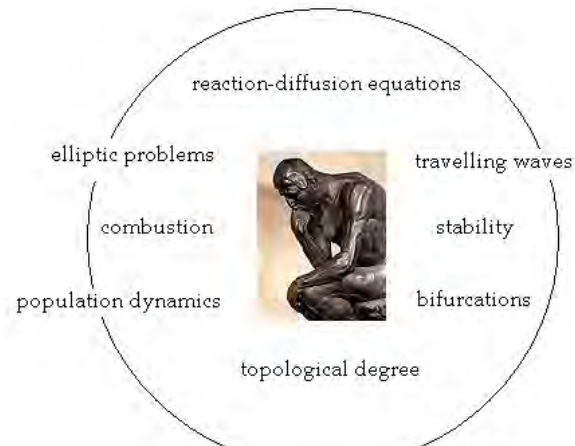
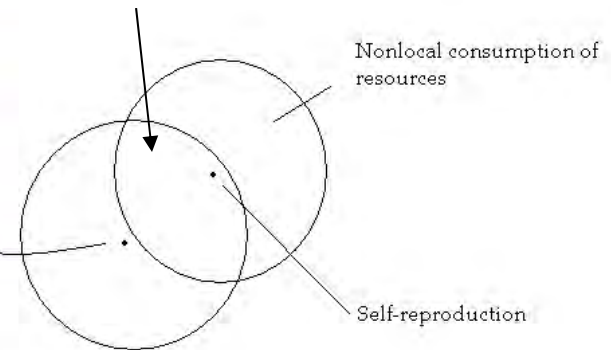
Nonlocal consumption of resources



Morphological
space

Intra-specific competition

Latvian brown cow



6.4 Equation de réaction-diffusion non locale

Dynamique des populations avec la compétition intra-spécifique pour les ressources :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y)u(y,t)dy \right), \quad 0 < x < \pi. \quad (6.28)$$

Conditions périodiques :

$$u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi). \quad (6.29)$$

On suppose que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)dy = 1.$$

La solution stationnaire $u = 1$. Opérateur linéarisé :

$$Lu = du'' - a \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y)u(y)dy.$$

Problème de valeurs propres :

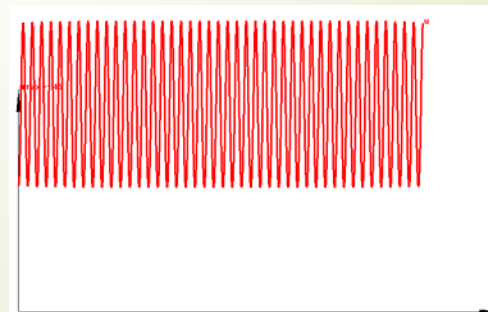
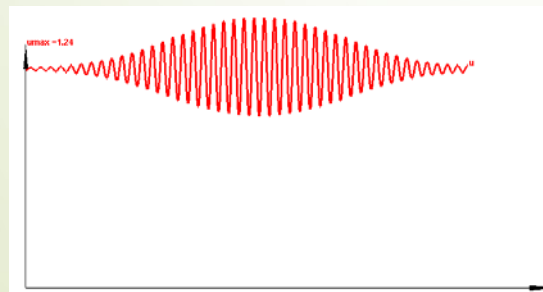
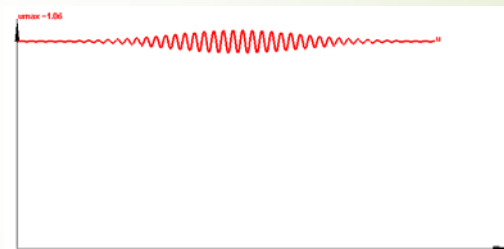
$$Lu = \lambda u, \quad u(0) = u(L), \quad u'(0) = u'(\pi).$$

Transformation de Fourier

$$\lambda = -d\xi^2 - a\tilde{\phi}(\xi).$$

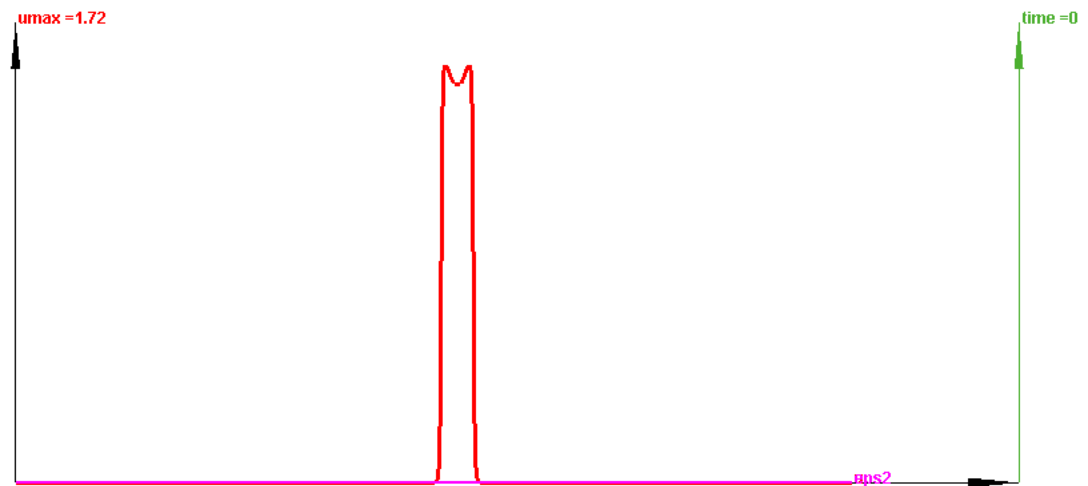
Emergence of structures from a homogeneous in space solution

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y)u(y,t)dy \right)$$

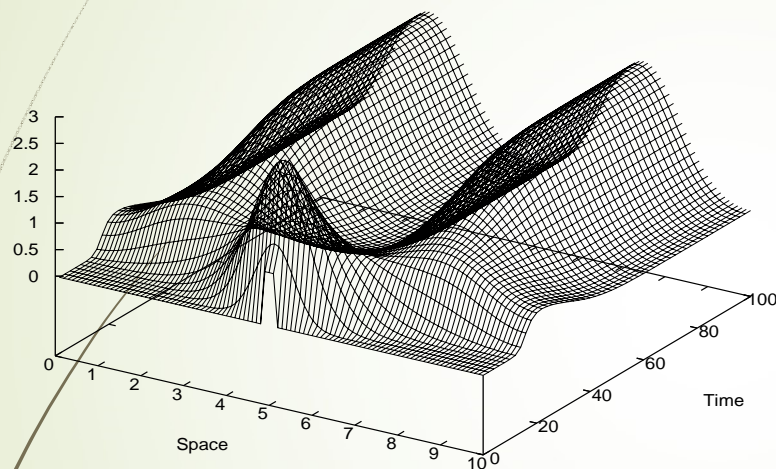


Periodic wave propagation

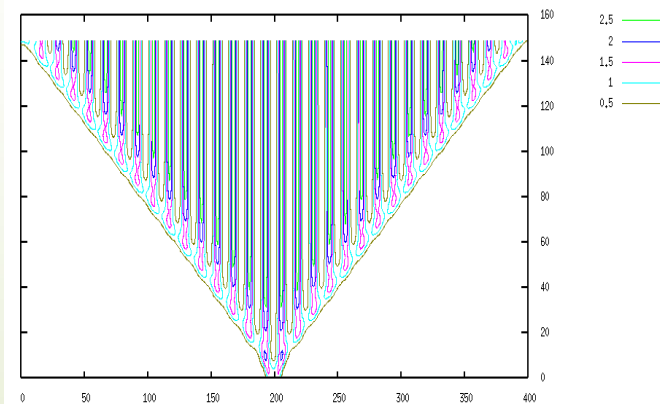
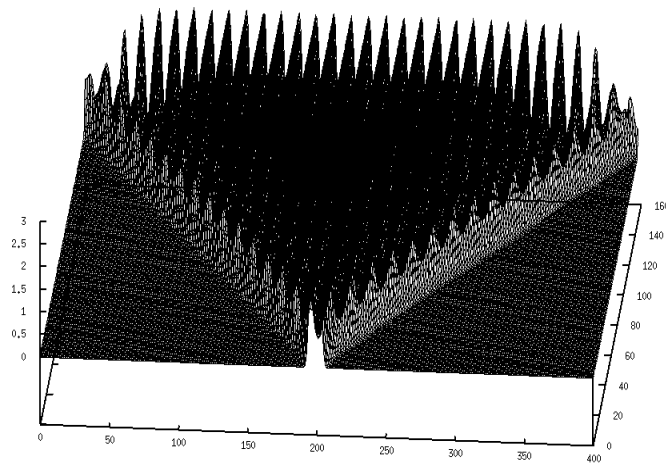
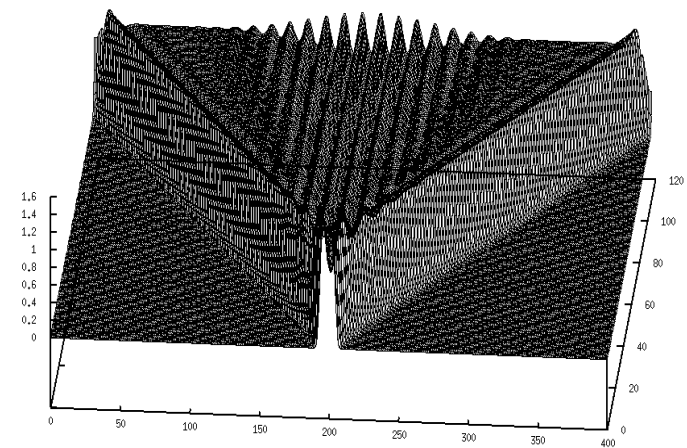
$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y)u(y,t)dy \right)$$



Initiation and propagation of periodic waves



c —



Periodic waves

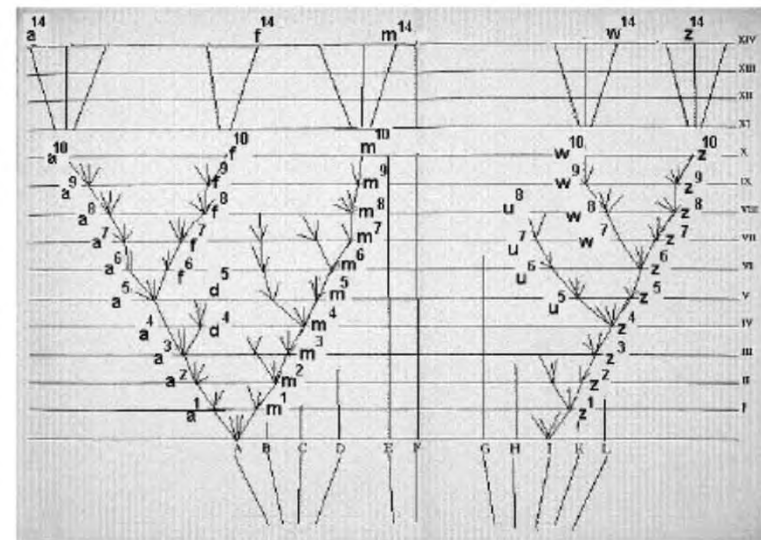
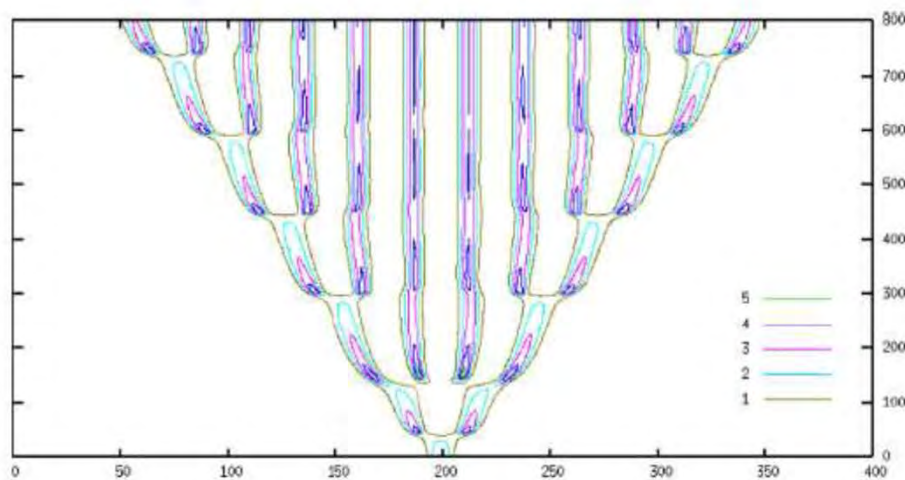


Figure 14: Simulation numérique de l'équation de réaction-diffusion nonlocale (à gauche) ; diagramme de Darwin où il explique l'émérgence des espèces biologiques (à droite).

Conclusion

- Emergence of biological species is described as periodic waves in nonlocal reaction-diffusion equations

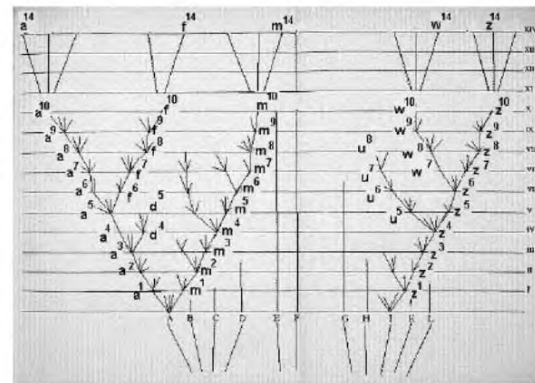
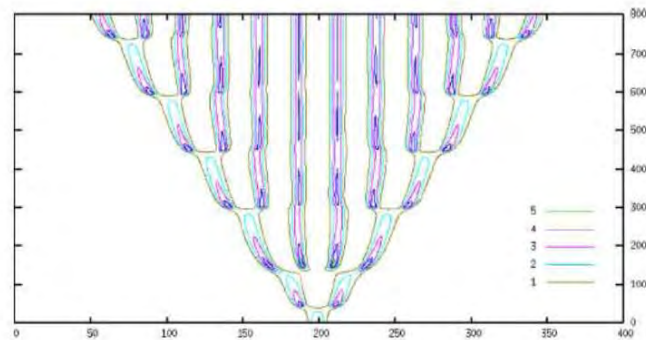


Figure 14: Simulation numérique de l'équation de réaction-diffusion nonlocale (à gauche) ; diagramme de Darwin où il explique l'émergence des espèces biologiques (à droite).